5.2 正项级数的审敛法

1. http://nos.netease.com/edu-image/98F3ADB49853CABAD5AEF760D5C88DCC.png?imageView&thumbnail=520x520&quality=100

①.由题，an-bn≥0，cn-bn≥0，构造两个以这两个为通项的正项级数和。

②.然后根据和均收敛，则收敛。

③.由于cn≤an，所以cn-bn≤an-bn。所以根据正项级数的审敛法中的比较审敛法知：因收敛，所以收敛。

④.又因收敛，收敛，所以收敛。

2. http://nos.netease.com/edu-image/7FD46E250F738DFAE648A5B4D6CE3A91.png?imageView&thumbnail=520x520&quality=100

⑴.+===，则=，因，而收敛，所以收敛。

⑵.令tanx=t，x=atant，dx=1/(1+t^2)·dt则==，其中∈(0,1)。【这里用到了积分中值定理，对于不同的n，有不同的。】

进一步地，设有一p>1的p级数，取===≤，探讨当≥0时，毫无疑问=0；当<0时，= ，此时应用[]+1次洛必达法则后，式子变为，此时观察到分子中的指数为负数，而底数n→∞，那么分子的极限无论如何也=0；同时由于分母的指数恒为∞，且底数大于1，所以分母的极限为∞；所以整个分式的极限为0。

综上，不管取值如何，均有≤=0，则=0。那么由于是对于任意一p>1的p级数，则根据比较审敛法的极限形式=0，再加上p>1时，p级数收敛，得到级数收敛。

综上，不管取值如何，均有收敛。所以对于>0，级数仍收敛。

3. http://nos.netease.com/edu-image/46D858FB10DD7F6F75DB9A4F05435E45.png?imageView&thumbnail=520x520&quality=100

由于数列{an}单调上升且有界，所以存在，并设=k。根据极限的定义，取任意一个给定的小正常数，总存在一个对应的最小的大正常数N，使得当n>N时，，此时<<，取左侧不等式<，易知当n+1>N时，，则，则=<。

又由于将级数的部分和记为Sn==，则= =，则级数收敛，则级数收敛。

4. http://nos.netease.com/edu-image/7CF504BFA960F600007ACC5FAC2A1DBD.png?imageView&thumbnail=520x520&quality=100

不成立。举如下一反例：取，显然它收敛。那么正项级数，但此时由于调和级数发散，所以该命题的逆命题不成立。